

## UMA PROPOSTA DIFERENCIADA PARA O ESTUDO DE APLICAÇÕES DE INTEGRAIS.

Samela Tais Gonzalez do Prado<sup>1</sup>

Sâmela Taís González do Prado<sup>2</sup>

Luciano de Oliveira<sup>3</sup>

### Resumo:

Para as pessoas que já passaram, em algum momento da sua formação acadêmica, por uma disciplina de Cálculo Integral e Diferencial, é senso comum que os professores que ministram essa disciplina trabalham sempre da mesma forma, com listas de exercícios e demonstrações. Os docentes, de forma geral, não levam em consideração a natureza do curso no qual está se trabalhando o Cálculo. Mas cada curso possui suas características e deve ser por meio destas que o professor deve elaborar suas aulas. Em se tratando de um curso de licenciatura, é necessário pensar na realização de atividades diferenciadas, que contribuam na formação docente dos futuros professores, inclusive na disciplina de Cálculo. Dado o exposto, O presente trabalho tem por objetivo apresentar o desenvolvimento de uma atividade realizada na disciplina de Cálculo Integral e Diferencial II, do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Farroupilha - Campus Alegrete. Idealizada pelo professor responsável pela disciplina e aplicado no 2º semestre de 2016, se justifica pela necessidade de que os discentes pesquisassem e verificassem a aplicação prática das ferramentas do cálculo Integral empregadas, com elementos do cotidiano dos mesmos, por meio de uma proposta diferenciada. Para tal, pensou-se na modelagem de uma curva, feita por meio da execução de diversas etapas em que os discentes tiveram como objetivos aplicar os conhecimentos matemáticos para modelar, calcular e comparar, inclusive valores de comprimento, volume e área, relacionados com a curva. Ao concluir a execução do trabalho, constatou-se a importância de atividades diferenciadas, associadas ao cotidiano dos alunos nas aulas de cálculo, pois dessa forma foi possível assimilar melhor os conhecimentos adquiridos e desenvolver habilidades de cálculo com maior correção.

**Palavras-chave:** CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL; ENSINO; PROPOSTA DIFERENCIADA.

**Modalidade de Participação:** Iniciação Científica

## UMA PROPOSTA DIFERENCIADA PARA O ESTUDO DE APLICAÇÕES DE INTEGRAIS.

<sup>1</sup> Aluno de graduação. samelatais0@gmail.com. Autor principal

<sup>2</sup> Aluno de graduação. samelatais0@gmail.com. Apresentador

<sup>3</sup> Docente. luciano.oliveira@iffarroupilha.edu.br. Orientador



## UMA PROPOSTA DIFERENCIADA PARA O ESTUDO DE APLICAÇÕES DE INTEGRAIS.

### 1. INTRODUÇÃO

Segundo Prado (2013), o Cálculo Diferencial e Integral se desenvolveu com os estudos de Newton e Leibniz, dando origem aos fundamentos mais importantes do cálculo: as derivadas e as integrais. As integrais são de uma grande importância em inúmeras aplicações, sendo algumas delas o cálculo de volumes em sólidos de revolução, áreas e comprimentos de curvas.

Brito e Cardoso (1997), abordam que não é raro, entre os professores de Cálculo, trabalhar sempre da mesma forma, sem levar em consideração a natureza do curso. Essa forma, geralmente, é a partir de demonstrações e listas de exercícios. Porém, como cada curso possui suas características, deve ser por meio destas que o professor deve elaborar suas aulas. Em se tratando de um curso de licenciatura, é necessário pensar na realização de atividades diferenciadas, que contribuam na formação docente dos futuros professores, inclusive na disciplina de Cálculo.

O presente resumo tem por objetivo apresentar o desenvolvimento de um trabalho na disciplina de Cálculo Integral e Diferencial II, do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete. Idealizada pelo professor responsável pela disciplina e aplicada no 2º semestre de 2016, a atividade se justifica pela necessidade de que os discentes pesquisassem e verificassem a aplicação prática das ferramentas do cálculo integral empregadas, com elementos do cotidiano dos mesmos, por meio de uma proposta diferenciada.

Para tal, pensou-se na modelagem de uma curva, feita por meio da execução de diversas etapas em que os discentes tiveram como objetivos aplicar os conhecimentos matemáticos para modelar, calcular e comparar, inclusive valores de comprimento, volume e área, relacionados com a curva.

### 2. METODOLOGIA

O trabalho proposto foi intitulado “Aplicações de Integrais: Volume, Área e Comprimento”, era individual e foi composto de doze passos que deveriam ser executados na sequência, para que os objetivos fossem alcançados.

Inicialmente, cada aluno deveria fazer um registro fotográfico de algum elemento do meio ambiente que possuía alguma curva. Para atender esse passo foi escolhido uma curva de cano de um fogão a lenha, conforme Figura 1.



Figura 1. Elemento escolhido: cano de fogão a lenha, realizada pelo próprio autor.

No segundo passo, deveria ser determinado o comprimento real da curva e explicada a metodologia empregada. A medição do comprimento da curva foi realizada por meio de uma fita métrica tipo trena, de 1,5 metros, de costureira. Tal procedimento foi possível pelo fácil acesso à curva, que estava ao alcance das mãos.

No terceiro passo do trabalho, que consistia de fazer a representação dessa curva em um plano cartesiano, optou-se por um desenho manual, em uma folha A4. Inicialmente foi impresso, no papel, um plano cartesiano, com escala unitária em centímetros (e subdividida em milímetros, quando necessário). Depois, usando a técnica de papel vegetal, foi transcrita a curva nesse plano cartesiano, porém com uma posição diferente do que estava na foto, por ser a maneira mais conveniente para a continuidade do trabalho.

Dando sequência à atividade, foi necessário determinar a escala da fotografia (e também da curva desenhada) em relação ao tamanho real da curva. Com o auxílio de um barbante, colocado sobre a curva desenhada no plano cartesiano, cortado e depois espichado sobre a trena, foi possível descobrir a medida da curva desenhada. Com esse dado e com comprimento real da curva, determinou-se a escala solicitada.

O quinto passo pedia a determinação de pontos  $(x, y)$ , pertencentes à curva, no plano cartesiano. Isso foi realizado manualmente, com o uso de régua e esquadro.

Na sequência, usando os pontos escritos anteriormente, foi solicitado que se determinasse a função  $y = f(x)$  que representa a curva no plano cartesiano. Isto é, era preciso descobrir a função que também plotava o gráfico da curva representada, em um intervalo escolhido  $x \in [a, b]$ . Para isto foi utilizado a ferramenta “ajuste de curva”, do *software Excel*, que permite encontrar a equação da curva que melhor representa a distribuição dos pontos dados, podendo ser um ajuste linear, quadrático, polinomial ou vários outros tipos de funções. Seguindo a sugestão do professor, foi realizado o ajuste para uma função quadrática. Também foi escolhido o intervalo para se obter os resultados de área, volume e comprimento mais aproximados do real e que facilitassem os cálculos, a saber:  $x \in [-4, 4]$ .

Depois disso, foi dado início às aplicações de integrais, pois o passo seguinte solicitava o cálculo da área da superfície  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$ , calculada a partir da expressão  $S = \int_a^b f(x) dx$ . Como o ajuste de curva forneceu a função  $f(x) = 0,1758x^2 + 0,0209x + 0,1355$ , a superfície a ser calculada foi  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -4 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq 0,1758x^2 + 0,0209x + 0,1355\}$ , efetuada a partir da expressão  $S = \int_{-4}^4 (0,1758x^2 + 0,0209x + 0,1355) dx$ .

O oitavo passo realizado foi determinar, a partir do cálculo integral, o volume do sólido de revolução da curva. Por sugestão do professor, fixou-se eixo  $Oy$  como eixo de rotação e aplicou-se a expressão  $V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$ . Nessa expressão, utilizou-se o intervalo para  $x \in [0, 4]$ , que proporcionou a aproximação mais adequada para a revolução. Com isso, o cálculo realizado foi a partir da expressão  $V = 2\pi \int_0^4 x \cdot (0,1758x^2 + 0,0209x + 0,1355) dx$ .

O nono procedimento deste trabalho foi, também por meio do cálculo integral, determinar o comprimento da curva. Para isso usou-se uma calculadora de integrais online, por orientação do professor, com o intuito de mostrar outra ferramenta para auxiliar no desenvolvimento do cálculo. Como a expressão de comprimento é  $L = \int_a^b \sqrt{g(x)} dx$ , com  $g(x) = 1 + [f'(x)]^2$ , foi realizada, em um primeiro momento, a simplificação de  $g(x)$ , com o cálculo da derivada  $f'(x)$ , do quadrado dessa derivada e a soma com 1, o que resultou na expressão  $g(x) = 0,1236x^2 + 0,0147x + 1,0004$ . Assim, para calcular o comprimento da curva, bastaria desenvolver a expressão

$L = \int_{-4}^4 \sqrt{0,1236x^2 + 0,0147x + 1,0004} dx$ . Após pesquisar algumas calculadoras online, decidiu-se por usar a “Integral Calculator”.

Como décimo passo foi solicitado os cálculos para verificar o tamanho real que teria a curva calculada no passo anterior, usando a escala previamente determinada. Depois foi realizada a comparação desse valor com o valor obtido pela medição no segundo passo. Finalizando o trabalho, foi realizada uma conclusão sobre o mesmo.

### 3. RESULTADOS e DISCUSSÃO

A partir da escolha da curva do cano de fogão a lenha, o trabalho foi se desenvolvendo e obtendo-se os resultados de cada passo.

Para a realização da medição do cano, observou-se dois pontos específicos, que foram igualmente considerados para o passo seguinte. Nessa medição registrou-se o comprimento de 77 centímetros. No momento em que se transcreveu o desenho manualmente para o plano cartesiano, como já se sabia que o ajuste de curvas seria para uma função quadrática, se adaptou a posição da foto para possibilitar uma melhor visualização de parte de uma parábola, como mostra a Figura 2.

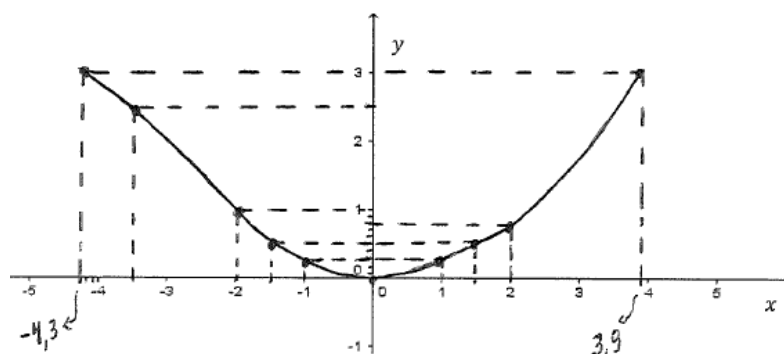


Figura 2. Representação da curva no plano cartesiano, realizada pelo próprio autor

Após esta representação, a medição da curva no papel resultou em uma medida de 11,5 centímetros, que na sequência foi utilizada no cálculo da escala da fotografia e também da curva desenhada, como mostra a equação (3.1).

$E = \text{escala}$  ;  $d = \text{distância no desenho} = 11,5 \text{ cm}$  ;  $D = \text{distância real} = 77 \text{ cm}$

$$E = \frac{d}{D} = \frac{11,5}{77} = \frac{\frac{11,5}{11,5}}{\frac{77}{11,5}} = \frac{1}{6,69565} \Rightarrow E = 1 : 6,69565 \quad (3.1)$$

Como resultado na determinação dos pontos  $(x,y)$  escreveu-se os seguintes pares ordenados determinados manualmente no desenho:  $(-4,3 ; 3)$  ,  $(-3,5 ; 2,5)$  ,  $(-2 ; 1)$  ,  $(-1,5 ; 0,5)$  ,  $(-1 ; 0,3)$  ,  $(0 ; 0)$  ,  $(1 ; 0,3)$  ,  $(1,5 ; 0,5)$  ,  $(2 ; 0,8)$  ,  $(3,9 ; 3)$ . Esse número de 10 pares ordenados foi escolhido haja vista que quantos mais pontos forem inseridos no programa *Excel*, mais acertado será o ajuste de curvas.

Para a determinação da função da curva representada no plano cartesiano, usou-se o programa *Excel* para ajuste da curva. Os pontos  $(x,y)$  foram colocados em duas colunas, uma nominada de  $x$  e outra  $y$  , que foi selecionada e então usado o comando “inserir, gráfico de dispersão”. Com isso o gráfico de pontos foi gerado. Depois, o gráfico foi selecionado e dado o comando “Elementos do gráfico”, marcada a caixa “linhas de tendência, mais opções”. Na aba de opções, selecionou-se o item

“polinomial, ordem 2” e marcada a caixa “Exibir equação no gráfico”. Depois destas ações o programa exibiu a equação e mostrou o gráfico, como mostra a Figura 3.

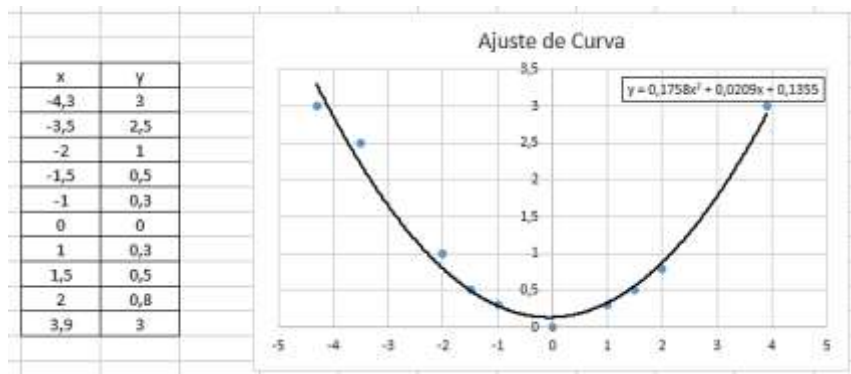


Figura 3. Ajuste de Curva, realizado pelo próprio autor.

No passo seguinte, determinou-se a área  $S$  solicitada, pela resolução da integral, conforme equações (3.2) a (3.6):

$$S = \int_{-4}^4 (0,1758x^2 + 0,0209x + 0,1355) dx \quad (3.2)$$

$$S = \int_{-4}^4 0,1758x^2 dx + \int_{-4}^4 0,0209x dx + \int_{-4}^4 0,1355 dx \quad (3.3)$$

$$S = \left[ \frac{0,1758x^3}{3} \right]_{-4}^4 + \left[ \frac{0,0209x^2}{2} \right]_{-4}^4 + [0,1355x]_{-4}^4 \quad (3.4)$$

$$S = 7,5008 - 0 + 1,0840 \Rightarrow S = \mathbf{8,5848 \text{ cm}^2} \quad (3.5)$$

No oitavo passo, foi calculado o volume  $V$  do sólido pela revolução no eixo  $Oy$ , como segue nas equações (3.6) a (3.9):

$$V = 2\pi \int_0^4 x \cdot (0,1758x^2 + 0,0209x + 0,1355) dx \quad (3.6)$$

$$V = 2\pi \int_0^4 0,1758x^3 dx + \int_0^4 0,0209x^2 dx + \int_0^4 0,1355x dx \quad (3.7)$$

$$V = 2\pi \left\{ \left[ \frac{0,1758x^4}{4} \right]_0^4 + \left[ \frac{0,0209x^3}{3} \right]_0^4 + \left[ \frac{0,1355x^2}{2} \right]_0^4 \right\} \quad (3.8)$$

$$V = 2\pi(11,2512 + 0,4459 + 1,084) \Rightarrow V = \mathbf{80,3060 \text{ cm}^3} \quad (3.9)$$

Para determinar o comprimento da curva, inicialmente foi determinada a função  $g(x)$ , radicando da raiz quadrada do integrando, conforme equações (3.10) a (2.12):

$$f'(x) = (0,1758x^2 + 0,0209x + 0,1355)' = 0,3516x + 0,0209 \quad (3.10)$$

$$[f'(x)]^2 = (0,3516x + 0,0209)^2 = 0,1236x^2 + 0,0147x + 0,0004 \quad (3.11)$$

$$g(x) = 1 + [f'(x)]^2 = 0,1236x^2 + 0,0147x + 1,0004 \quad (3.12)$$

Para o cálculo da integral  $L = \int_{-4}^4 \sqrt{0,1236x^2 + 0,0147x + 1,0004} dx$ , utilizou-se a calculadora online como mostra a Figura 4, resultando no valor  $L = \mathbf{10,1504 \text{ cm}}$ .

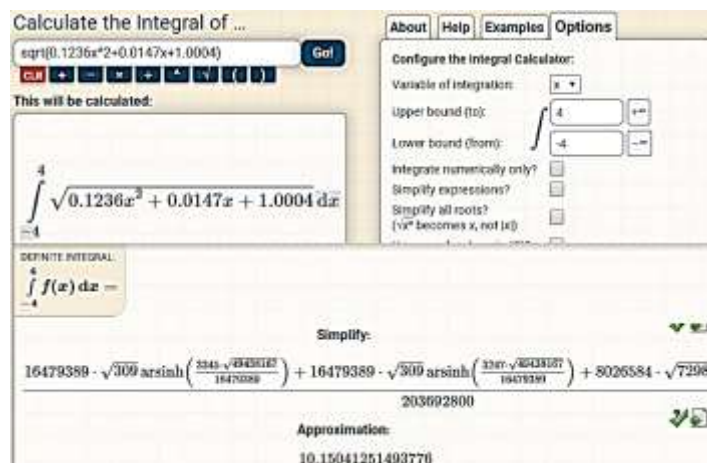


Figura 4. Resolução do comprimento da curva na calculadora online “*Integral Calculator*”, realizado pelo próprio autor.

Após este resultado, foi determinado, a partir do valor  $L$ , que comprimento teria a curva em uma representação no tamanho real, a partir da escala da equação (3.1). Encontrou-se o valor de  $D_1 = 67,9635 \text{ cm}$ , como segue na equação (3.13):

$$E = \frac{d}{D} \Rightarrow E = \frac{L}{D_1} \Rightarrow \frac{1}{6,69565} = \frac{10,1504}{D_1} \Rightarrow D_1 = 67,9635 \text{ cm} \quad (3.13)$$

Comparando os valores de comprimento real, obtido pela medição com a trena, de 77 cm, e o calculado por meio do uso do cálculo integral e da escala, de  $D_1 = 67,9635 \text{ cm}$ , foi possível verificar uma diferença de 9,0365 cm. Pela análise realizada com os valores e com os passos executados, atribui-se este erro às questões de medição da curva e transferência do desenho para o plano, uma vez que foram ações realizadas manualmente e passíveis de erro humano. Mesmo assim, acredita-se que o processo de equiparação dos valores calculados e medidos estão dentro de valores aceitáveis dentro do processo executado.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Constatou-se, por meio da realização deste trabalho, a importância de atividades diferenciadas e associadas ao cotidiano dos alunos nas aulas de Cálculo. Conforme Silva e Neto (1995), quando os alunos verificam que os conteúdos trabalhados em sala de aula correspondem às suas expectativas, conseguindo relacioná-los a situações reais, acabam assimilando melhor os conhecimentos adquiridos e desenvolvendo suas habilidades com maior correção. Isto indica que, utilizando tais atividades, as aulas de Cálculo serão mais produtivas.

#### 5. REFERÊNCIAS

- PRADO, P. F. *Integrais de Linha*. 2013. 36 f. Licenciatura em Matemática)– Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2013.
- BRITO, A. J.; CARDOSO, V. C. Uma abordagem histórico-pedagógica dos fundamentos do Cálculo Diferencial. *Zetetiké*. v.1, n. 5., jan./jun. 1997.
- SILVA, J. F.; NETO, H. B. *Questões Básicas no ensino de Cálculo*. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 1995.