

BREVE ESTUDO DA TRANSIÇÃO DE FASE

Rodrigo do Couto Polino¹

Anderson Cagliari²

Leandro Blass³

Anderson Luis Jeske Bihain⁴

Resumo:

O problema de Stefan consiste em criar um modelo matemático que prediga o comportamento de uma fronteira móvel entre duas fases de um material em transição de fase, e a temperatura (que varia em função da distância) do material, todas em função do tempo. Este trabalho tem como objetivo preparar o discente para o estudo da modelagem matemática da secagem de grãos. Pois envolve métodos idênticos na abordagem deste problema. Para o estudo de tal problema, utilizou-se a equação do calor que modela o problema da condução de calor. Foram observados também os regimes de troca de calor entre os dois meios.

Palavras-chave: Stefan Calor Modelagem

Modalidade de Participação: Iniciação Científica

BREVE ESTUDO DA TRANSIÇÃO DE FASE

¹ Aluno de graduação. rodrigopolino@hotmail.com. Autor principal

² Técnico Administrativo em Educação. andersoncagliari83@gmail.com. Co-autor

³ Docente. leandroblass@unipampa.edu.br. Co-orientador

⁴ Docente. andersonbihain@unipampa.edu.br. Orientador



BREVE ESTUDO DA TRANSIÇÃO DE FASE: PROBLEMA DE STEFAN

1. INTRODUÇÃO

O problema de Stefan consiste em criar um modelo matemático que prediga o comportamento de uma fronteira móvel entre duas fases de um material em transição de fase, e a temperatura (que varia em função da distância) do material, todas em função do tempo.

Este trabalho tem como objetivo preparar o discente para o estudo da modelagem matemática da secagem de grãos. Pois envolve métodos idênticos na abordagem deste problema.

2. METODOLOGIA

Para o estudo de tal problema utilizou-se a equação do calor que modela o problema da condução de calor:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad .(1)$$

Onde:

x é a distância em relação à origem

t é o tempo

α coeficiente de troca de calor

U é temperatura do que varia em função de t e x

Conforme o gelo vai derretendo é natural que o meio que antes era totalmente sólido comece a mudar de fase e passar para o líquido gradualmente. Sendo assim, o regime de troca de calor entre as duas extremidades da barra de gelo que antes era exclusivamente por condução passa a ser também por convecção.

Convecção é processo de transferência de calor que o ocorre através do deslocamento de camadas de um fluido, isso significa que ocorre com os líquidos e os gases (IF UFRGS).

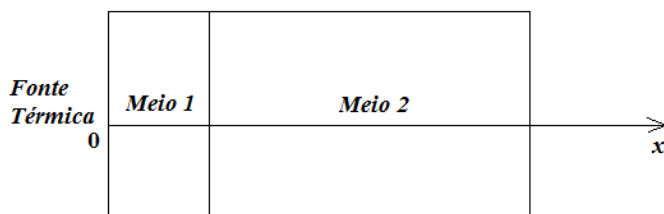


Figura 1. Representação linear da transição do gelo para água.

Empiricamente, sabemos que havendo uma fonte térmica na origem, onde $x = 0$, teremos um aumento da temperatura no sentido contrário ao crescimento de x . Portanto, um derretimento na direção de x . E a fronteira entre o gelo derretido e a água líquida será denominada fronteira móvel.

Seguindo os moldes de Bihain (2011), tem-se então o seguinte domínio para os dois regimes de transferência de calor:

$$\Omega = \{(x, t) | 0 < x < L; 0 < t < t_{m\acute{a}x}\}$$

Onde iremos dividir o domínio Ω em dois subdomínios:

$$\begin{cases} \Omega_1 = \{(x, t) | 0 < x < s(t); 0 < t < t_{m\acute{a}x}\} \\ \Omega_2 = \{(x, t) | s(t) < x < L; 0 < t < t_{m\acute{a}x}\} \end{cases}$$

Sabe-se que o ponto de fusão da água é 0°, portanto podemos afirmar que a temperatura da fronteira móvel independente da sua posição deve ser também esta.

Sendo assim, em cada subdomínio deve haver um α correspondente ao mesmo para a equação (1). Portanto:

$$\begin{cases} \Omega_1 \rightarrow \frac{\partial U_1}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} & (1) \\ \Omega_2 \rightarrow \frac{\partial U_2}{\partial t} = \alpha_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} & (2) \end{cases}$$

Tendo as seguinte condições de contorno

Resolvendo as equações diferenciais parciais:

$$U(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Obtêm-se para qualquer U o seguinte resultado:

$$U(x, t) = c_n e^{\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)t} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Onde c_n é um parâmetro obtido da resolução da equação e U tem n soluções. Pode-se então aproximar U a seguinte solução:

$$U(x, t) = S_U = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)t} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Sendo $n=1,2,3\dots$

O experimento consistia em preencher uma pequena garrafa com água onde foram distribuídos 4 termopares perpendiculares à altura da garrafa. A garrafa fora então posta no freezer a uma temperatura de aproximadamente -18°C.



Figura 2. Experimento sendo realizado.

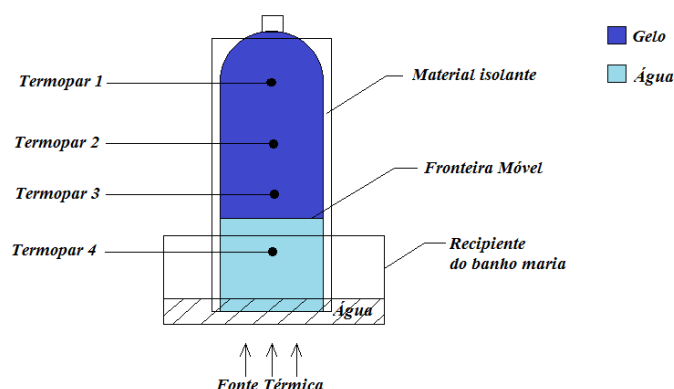


Figura 3. Representação do experimento.

Os termopares 1, 2, 3 e 4 foram colocados nessa ordem nas distâncias de 1, 3, 5 e 7cm e as pontas situadas no centro da garrafa.

Após o total congelamento da água, a garrafa foi posta em banho-maria sendo que só sua base (cerca de 1cm) ficou submersa à uma temperatura de aproximadamente 60°C.

Quando a garrafa foi submersa, a temperatura da água quente baixou para aproximadamente 49°C, subindo gradualmente até aproximadamente 60° ao fim do experimento.

3. RESULTADOS e DISCUSSÃO

As temperaturas foram coletadas a cada dois minutos, obtendo os seguintes gráficos para cada termopar (Eixo vertical representa a temperatura (°C) e o horizontal o tempo (minutos)):

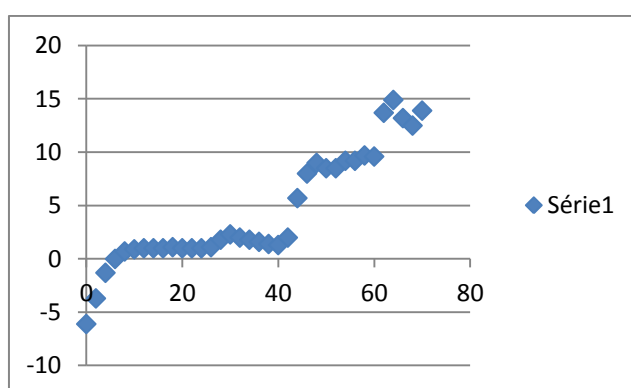


Figura 4. Temperatura no termopar 1 em função do tempo.

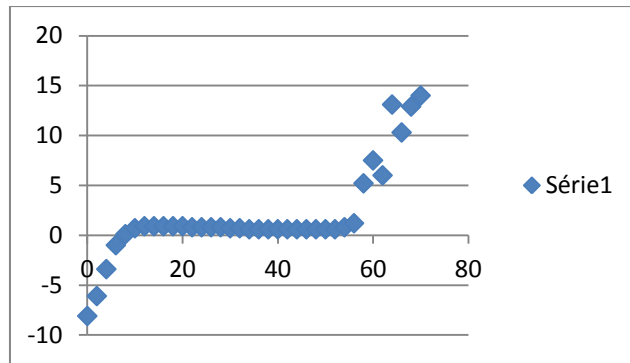


Figura 5. Temperatura no termopar 2 em função do tempo.

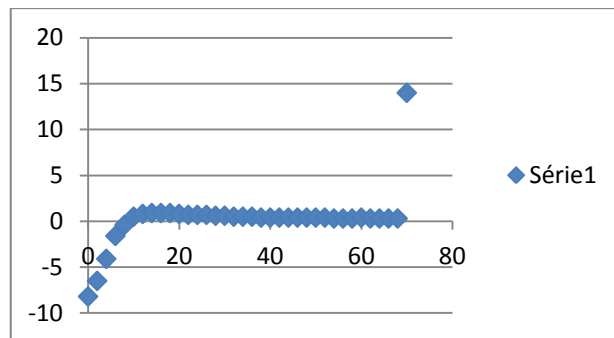


Figura 6. Temperatura no termopar 3 em função do tempo.

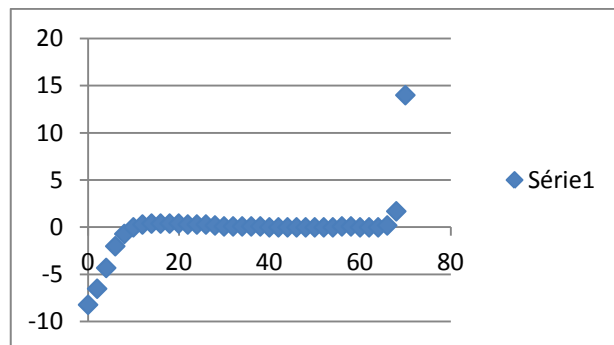


Figura 7. Temperatura no termopar 4 em função do tempo.

Podemos observar através dos gráficos que quando há a transição de fase do sólido para o líquido, um regime oscilatório de temperatura começa a valer. Comportamento típico de uma convecção, quando massas de diferentes temperaturas ficam alternando suas posições.

Experimentalmente, verificou-se que a fronteira móvel tinha a seguinte dinâmica:

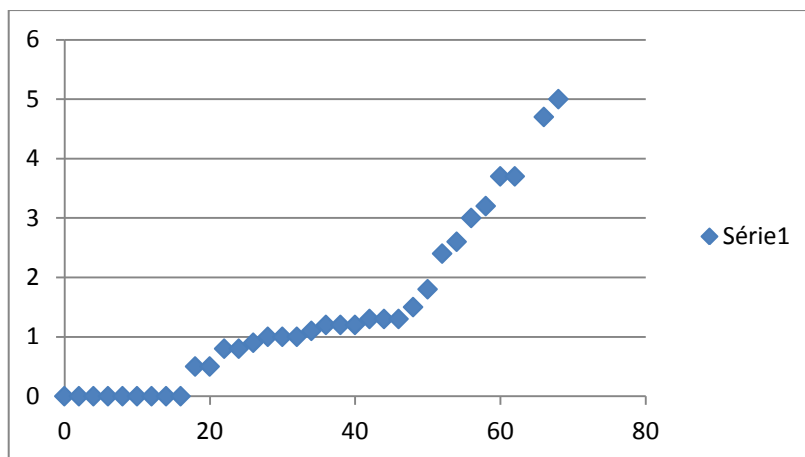


Figura 8. Fronteira móvel em função do tempo.

Percebeu-se que a mesma não tinha uma velocidade constante. Portanto, utilizou-se um ajuste quadrático, tendo assim a seguinte aproximação numérica para a posição ($s(t)$) da fronteira móvel em função do tempo (t):

Para o software VCN ($R^2 \cong 0,9599798$):

$$s(t) = 0,0012774t^2 - 0,0222761t + 0,2142045$$

A temperatura média da fronteira móvel, ou seja, para quando ela passou pelas distâncias de 1, 3, 5 e 7cm, foi de aproximadamente $1,17^\circ$.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se através do experimento que há uma transição de regime de troca de calor quando a fronteira móvel passa o termopar, ou seja, quando há o derretimento do gelo. E que a velocidade da fronteira móvel não é constante.

Este trabalho atinge também assim seu objetivo principal, que é exercitar o discente com métodos matemáticos e de procedimentos que estão e ainda serão abordados no projeto de modelagem matemática da secagem de grãos.

5. REFERÊNCIAS

BIHAIN. Modelagem Matemática da influência da umidade do ar, sobre a dinâmica de secagem de grãos de soja em camada fina.. 2011. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática). Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2011.

Propagação do calor. Site da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. [acesso em 1 out 2017] Disponível em:

<http://www.if.ufrgs.br/~leila/propaga.htm#conveccao>