

DOBRANDO AQUI, DOBRANDO ALI E EIS QUE SURGEM ELIPSES, PARÁBOLAS E HIPÉRBOLES

Reginaldo Fabiano da Silva Afonso¹

Leriana de Freitas Martins Afonso²

Jose Carlos Pinto Leivas³

Jose Carlos Pinto Leivas⁴

Resumo:

Este trabalho ilustra uma atividade realizada por um grupo de estudos e pesquisas, a qual aborda recursos didáticos para obtenção de cônicas, em particular, foi detalhada a elipse. Usando uma folha de papel vegetal, no formato A4, os participantes foram conduzidos a realizar dobras no papel, devidamente orientadas, que conduziram visualmente à obtenção da cônica. Discutida a construção e identificado o lugar geométrico os estudantes buscaram o conceito da curva e passaram a realizar o mesmo tipo de dobras no software Geogebra com o que foi possível formalizar o conceito, a equação da elipse e seus elementos. Como fundamentação teórica no que diz respeito à materiais didáticos foi utilizada a teoria de Zabala (1998). Entende-se que a atividade vai ao encontro do que se preconiza como habilidade visual, importante para o desenvolvimento de pensamento geométrico, especialmente no que diz respeito à Transposição Didática apontada por Chevallard (1991) pois correspondeu a uma atividade que buscou levar o conhecimento sábio do matemático ao saber ensinado, tão necessário para o desenvolvimento de pensamento geométrico. A partir dessa construção foram também realizadas atividades com parábolas e hipérboles.

Palavras-chave: Ensino, Geometria, Cônicas, Elipse

Modalidade de Participação: Pós-Graduação

DOBRANDO AQUI, DOBRANDO ALI E EIS QUE SURGEM ELIPSES, PARÁBOLAS E HIPÉRBOLES

¹ Docente. regis.fab2@gmail.com. Autor principal

² Aluna graduação. leriana@gmail.com. Co-autor

³ Docente. leivasjc@unifra.br. Co-autor

⁴ Docente. leivasjc@yahoo.com.br. Orientador

DOBRANDO AQUI, DOBRANDO ALI E EIS QUE SURGEM ELIPSES, PARÁBOLAS E HIPÉRBOLES

1 INTRODUÇÃO

O Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria – GEPGEO - tem desenvolvido propostas de atividades visando contribuir para o ensino e aprendizagem nessa área, pouco explorada, tanto na escola básica quanto no ensino superior. Como aponta Leivas (2009), na grande maioria dos cursos que oferecem Licenciatura em Matemática no RS, aparece uma disciplina de geometria plana, outra de espacial e uma de analítica. Pouco se explora, na formação de professores, nessas disciplinas, metodologias alternativas proporcionando estímulos para seu estudo e envolvimento dos estudantes na construção do conhecimento geométrico.

Uma dessas formas alternativas que pode contribuir para o ensino e aprendizagem é empregar materiais didáticos ao que Zabala (1998), classifica como materiais curriculares ou materiais de desenvolvimento curricular, os quais para ele são “todos aqueles instrumentos que proporcionam ao educador referências e critérios para tomar decisões, tanto no planejamento como na intervenção direta no processo de ensino/aprendizagem e em sua avaliação” (p. 167).

Explorar o conteúdo apenas sob o aspecto formal, dedutivo, parece não favorecer uma aprendizagem com significado para o futuro professor desencadear o processo de ensino ao chegar ao ambiente profissional. Chevallard (1991) diz que é necessário levar o saber sábio, do profissional matemático, ao saber ensinado, aquele necessário ao professor em sua prática profissional. Nesse sentido, o autor indica a necessidade de realizar uma transposição didática, ou seja, “todo projeto social de ensino e aprendizagem se constitui dialeticamente com a identificação e a designação de conteúdos de saberes como conteúdos a ensinar” (p. 45). Para o autor, o conteúdo de um saber preciso necessita obter uma versão didática do objetivo de saber que, por sua vez deve conduzir ao objeto a ensinar, ou seja, o objeto de ensino.

A partir dessas premissas do autor, o GEPGEO tem pesquisado recursos didáticos para realizar a transposição, pois a elaboração de estratégias de ensino é um ponto crucial para isso ocorrer e a escolha de recursos adequados faz a diferença. Lorenzato (2006) indica materiais didáticos manipuláveis concretos que podem compor um laboratório de Matemática. Para ele, atividades manipulativas ou visuais não garantem por si só aprendizagem. É necessário haver atividade mental involucrada. Para essa comunicação foi escolhido o material didático papel para obtenção das cônicas: elipse, hipérbole e parábola, por meio de dobras, uma das investigações realizadas pelo grupo no primeiro semestre do ano de 2018. A decisão pelo uso desse recurso prendeu-se ao fato que, ao realizar as marcas ficando bem delimitadas, permitem explorar a habilidade de ‘visualização’. Além disso, emprega-se materiais de uso comum à Geometria, muitas vezes, pouco utilizados no seu ensino.

A respeito de visualização como habilidade para o desenvolvimento de pensamento geométrico, Leivas (2009), a define “como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos.” (p.22). Também, Arcavi (1999), indica

visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensa sobre e desenvolver ideias não conhecidas e avançar na compreensão. (p. 217).

2 METODOLOGIA

Por se tratar de um grupo de pesquisa que busca compreender e desenvolver atividades investigativas visando melhoria do ensino e aprendizagem em Geometria, entendemos que o presente estudo se refere a pesquisa qualitativa no ensino, a qual também é denominada de naturalista “porque não envolve manipulação de variáveis, nem tratamento experimental (é o estudo do fenômeno em seu acontecer natural)” (MOREIRA, 2011, p.76). Em razão de buscar compreender o fenômeno visualização de cônicas por meio alternativo ao puramente teórico, por definições e exemplos, justificamos o enquadramento neste tipo de pesquisa.

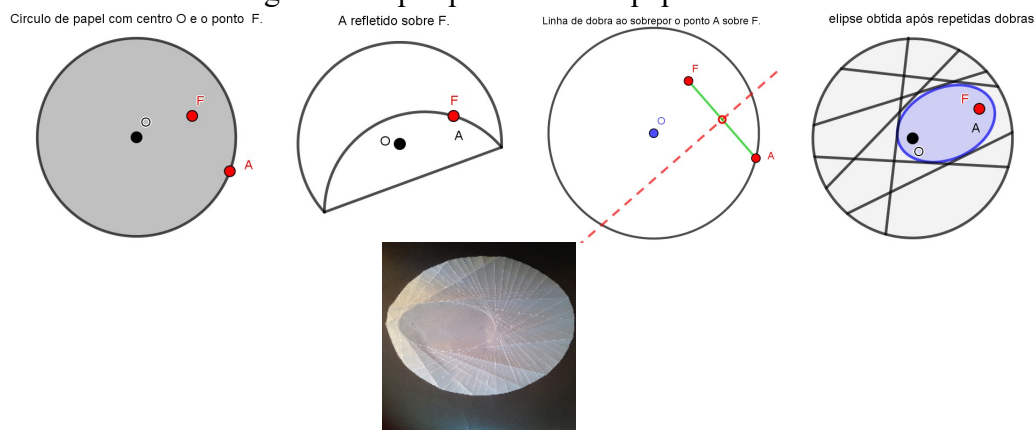
O estudo aqui apresentado iniciou com a busca de amparo teórico em visualização, prosseguindo sobre recursos didáticos o que conduziu à escolha do papel e dobras para formar conceitos visuais de cônicas. A investigação sobre o tipo de papel a ser utilizado recaiu sobre o “vegetal”, pois as dobras evidenciavam as marcas que proporcionavam a identificação visual da cônica. A partir dessa identificação, foi utilizado o software Geogebra para realizar os mesmos passos realizados no papel e reafirmar a visualização, por meio deste outro recurso didático, da cônica. Por fim, exploramos os aspectos matemáticos envolvidos nas construções para caracterizar, de fato, o lugar geométrico como sendo a cônica em apreço.

Os envolvidos são componentes do GEPGEO, participantes dos estudos e pesquisas, o líder do grupo, quatro orientandos de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática e três de mestrado do mesmo programa, um aluno de graduação e dois professores egressos. Eles se reúnem quinzenalmente durante uma manhã para estudos, elaboração de atividades a serem propostas em diversas situações, como em eventos onde são ofertadas oficinas, ações em escolas e universidades, das quais são extraídos dados para produção de artigos.

3 RESULTADOS e DISCUSSÃO

Detalhamos uma das atividades, por limitação de texto, ficando apenas indicativo das demais. Partindo de uma folha no formato A4, os participantes foram convidados a demarcar uma circunferência de centro O; um ponto F, localizado na região interior à circunferência e, inicialmente, um ponto A sobre ela. Rebatemos o ponto A sobre F, demarcando bem a linha de dobra. Repetimos este procedimento para muitos pontos A_i ($i=1,2,...,20,..., n$) alocados na circunferência [pelo menos 20 pontos]. Abrimos folha e observamos o lugar geométrico que fica representado (Figura 1).

Figura 1. Elipse por dobras de papel



Fonte: construção própria.

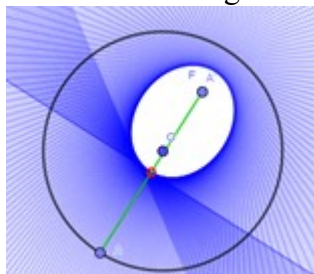
A partir disso, discutimos com o grupo a respeito desse objeto geométrico, bem como posições relativas do ponto F em relação ao ponto O. O grupo conclui, imediatamente, que o lugar geométrico se assemelha a uma ‘elipse’, sendo que alguns observaram se assemelhar à ‘circunferência’. Este fato ocorreu em função da posição do ponto F em relação ao O, uma

vez que tomados muito próximos, a elipse apresenta-se de forma visualmente assemelhada à circunferência, ou seja, em virtude da excentricidade da cônica.

O condutor do debate, questionou sobre quais os elementos geométricos que poderiam ser explorados com esta atividade em virtude da experiência docente dos participantes. Foram indicados: ponto médio, mediatriz, tangentes e secantes, dentre outros. Posteriormente à discussão inicial os participantes foram convidados a formalizar o conceito de elipse, seus elementos constituintes e obtenção da equação do lugar geométrico. Como cada participante teve o livre arbítrio de escolhas, foram capazes de obter conclusões adequadas, mediante a sequência de orientações fornecidas.

Da realização dessa atividade foi possível concluir que o dito por Leivas (2009) e Arcavi (1999) a respeito da habilidade de visualização, de fato, foi importante para a obtenção do objeto geométrico em apreço, ou seja, a elipse. Entretanto, torna-se necessário que isto seja comprovado de forma mais categórica. Por essa razão, o grupo partiu para a construção do mesmo objeto por meio do Geogebra, fazendo a transposição dos passos realizados com o material concreto papel/dobras. (Figura 2).

Figura 2. Elipse no GeoGebra seguindo o procedimento de dobras.



Fonte: construção própria.

Podemos observar que este outro recurso didático para a obtenção do lugar geométrico fortalece as concepções de Lorenzato (2006) sobre os materiais manipuláveis, uma vez que, ao não utilizar a ferramenta para obter diretamente a elipse, os participantes da investigação manipularam as diversas ferramentas disponíveis, aliando-as ao que fora feito no papel para obter o lugar geométrico elipse de forma visualmente mais declarada. Entretanto, para este autor, somente as atividades manipulativas ou visuais não garantem por si só aprendizagem. É necessário haver atividade mental involucrada. Neste sentido, foi necessário explorar tal atividade para a verificação de que o lugar geométrico, de fato constitui-se na elipse.

Indicamos o que o participante de codinome JU argumentou para considerar elipse o traçado obtido pelas dobras no software.

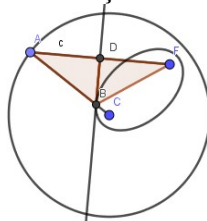
Vou focar meus comentários na construção da elipse com os recursos do Geogebra. Tenho certa dificuldade em trabalhar com o software, porque necessito ter muita clareza do que estou fazendo matematicamente, para então conseguir visualizar isso com os recursos computacionais. Nesta atividade não foi diferente. Apresento algumas perguntas que fui fazendo mentalmente e discuti com os colegas.

- Porque a construção da elipse a partir de uma circunferência? Porque era necessário um valor fixo, neste caso, dado pelo raio da circunferência tomada inicialmente.
- Qual a interpretação matemática dos riscos das dobras realizadas? São mediatrizes dos segmentos formados entre pontos sobre a circunferência e o ponto interno previamente escolhido.
- Quais condições devem ser satisfeitas para confirmar que a figura encontrada é mesma uma elipse? Considerando a elipse como o conjunto de pontos cuja a soma da distância a dois pontos é fixa, precisávamos garantir esta propriedade da elipse.

Agora, revendo os passos da construção descritos acima e lembrando minhas dúvidas, penso que realizamos um passo errado (ou eu fiz errado!). Acredito que por conta de uma troca de letras, o passo “d” não faz sentido, até mesmo porque se for construído desta forma não obtemos o triângulo ABD, como descrito no passo k, uma vez que os três pontos serão colineares. Acredito que esse fato talvez tenha causado alguma confusão nas conclusões finais tanto minha quanto dos demais colegas.

Revisando os passos e a própria construção, o passo ‘d’ na verdade consiste em: obter a interseção D entre o segmento AF e a sua mediatriz. Com isso obtemos os triângulos ABD e FBD. Refiz esse passo obtendo a construção representada na Figura 3.

Figura 3. Construção de JU.



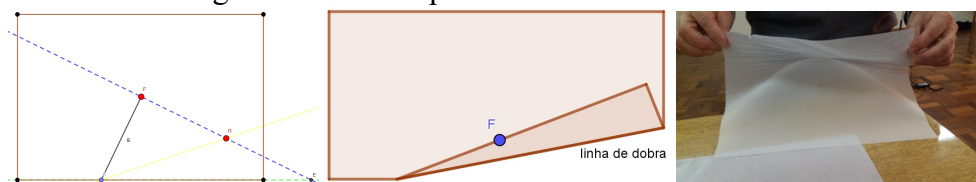
Fonte: construção própria de JU.

O participante esclarece que a partir dessa construção fica mais evidente verificar que os triângulos ABD e BDF são congruentes pelo caso LAL, pois $BD = BD$ (lado comum); $ADB = FDB$ (ângulo reto, pois é a mediatriz em relação a AF) e $AD = DF$ (D é ponto médio, pois é mediatriz). Para provar que a figura é uma elipse precisávamos mostrar que $BC + BF = AC$ (raio da circunferência, que é constante), o que se verifica, pois: $BC + BA = AC$. Como ABD e BDF são congruentes $AB = BF$. Logo, $BC + BF = AC$. (JU)

Escolhemos essa organização da prova matemática de JU para ilustrar o que Chevallard (1991) indicou sobre a transposição didática, ou seja, levar o saber sábio desse profissional que tem formação matemática formal para um saber ensinado, ou seja, o que é necessário transpor deste saber para o estudante de forma visual, em primeiro lugar, para posteriormente, chegar ao formalismo e comprovação de que a elipse é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é uma constante.

Para obtenção da parábola, o procedimento é um pouco diferente em virtude da própria definição, na qual é necessária uma reta diretriz, além do foco. Neste caso, foi fornecida uma segunda folha A4 do mesmo material, como indicado na Figura 4, em que é marcado um ponto F na região interior da folha, aproximadamente no centro. Seguindo uma sequência de passos fornecidos, esperávamos que os indivíduos obtivessem a parábola e, a partir dessa elaboração, discutissem com os participantes sobre o lugar geométrico, propriedades, lei de definição, dentre outros elementos envolvidos.

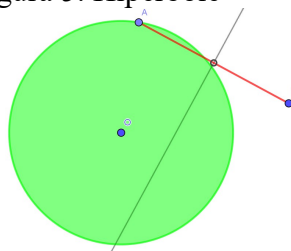
Figura 4. Parábola por linhas de dobras.



Fonte: construção própria.

Para a terceira construção é feito um procedimento similar ao da elipse, porém considerando o ponto F exteriormente à circunferência (Figura 3).

Figura 5. Hipérbole



Fonte: construção própria.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperamos que a análise das construções dos três lugares geométricos e as discussões proporcionadas durante os encontros investigativos possam contribuir para retomar/construir conhecimentos desses lugares que, em geral, não são abordados no Ensino Médio. Geralmente, na formação inicial do professor de Matemática, é feita apenas uma abordagem algébrica na disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica. Quando os estudantes necessitam da visualização, por exemplo, em Cálculo tais aspectos não são do conhecimento, ficando apenas uma abordagem em forma mecanizada o que parece não levar a uma construção efetiva duradoura. Além disso, os autores reiteram o afirmado por Leivas (2009, p. 22) de que a habilidade de visualização é “um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos”. Dessa forma, entende-se que o ‘conteúdo do saber’ cônicas, pode ter a forma de abordagem em oficinas como ‘versão didática’ desse objeto ‘cônica’, sendo o objeto do saber ‘cônicas’ levado ao ensino como apontado por Chevallard (1991). Em outra ocasião detalharemos as demais construções.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. The role of visual representation in the learning of mathematics. In: NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PME, 1999. **Proceedings...** Disponível em: <<http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>>. Acesso em: 30 set. 2008.

CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado** de. Argentina: Aique Grupo Editor S.A., 1991

LEIVAS, J.C.P. **IMAGINAÇÃO, INTUIÇÃO E VISUALIZAÇÃO: A RIQUEZA DE POSSIBILIDADES DA ABORDAGEM GEOMÉTRICA NO CURRÍCULO DE CURSOS DE LICENCIATURA DE MATEMÁTICA**. Tese (Doutorado em Educação, UFPR). Curitiba, 2009. 294p.

LORENZATO, S. (org.) **O laboratório de Matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.