# UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA ABORDAGEM DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO EM DIFERENTES NÍVEIS DE ENSINO

**Reginaldo Fabiano da Silva Afonso** [1]

**Jose Carlos Pinto Leivas** [2]

**Jose Carlos Pinto Leivas** [3]

**Resumo:**

Este trabalho apresenta uma proposta pedagógica para a exploração de problemas de otimização tanto na educação básica quanto no ensino superior. Propomos a utilização da geometria dinâmica, através do uso do Geogebra, aliada a investigação matemática e resolução de problemas para solucionar, tanto no nível básico como no superior, com os conhecimentos matemáticos adequados a cada etapa da formação do aluno a seguinte questão: "Dado um octógono regular, construir o quadrado inscrito de maior área e o quadrado circunscrito de menor área." Como fundamentação teórica no que diz respeito à abordagem pedagógica foi utilizada a teoria de Pólya (1962), dissecando o problema em análise nas seguintes etapas: compreender o problema, estabelecer um plano, executar um plano, fazer um retrospecto da resolução. Além disso, enunciamos quais conteúdos matemáticos foram abordados em em cada momento para cada nível de ensino e como a geometria dinâmica poderá auxiliar na construção e visualização do problema proposto.

**Palavras-chave:** Geometria, Investigação matemática, Resolução de problemas, Máximos e mínimos relativos.

**Modalidade de Participação:** Pós-Graduação

**UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA ABORDAGEM DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO EM DIFERENTES NÍVEIS DE ENSINO**

[1] Docente. regis.fab2@gmail.com. Autor principal

[2] Docente. leivasjc@unifra.br. Co-autor

[3] Docente. leivasjc@yahoo.com.br. Orientador

# UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA ABORDAGEM DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO EM DIFERENTES NÍVEIS DE ENSINO

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, uma das maiores inquietações na educação é a busca pela mudança no processo de ensino-aprendizagem, almejando um processo compartilhado, sendo este orientado e mediado pelo professor, mas com uma efetiva participação dos alunos (MORAN, 2013). Neste contexto, o docente tem por foco levar o aluno a pensar, propor situações que o faça refletir sobre problemas do mundo real, criando um ambiente propicio a troca de informações almejando soluções para o problema analisado e caso necessário propor, em conjunto com os alunos, reparos as soluções proferidas.

Os avanços tecnológicos têm aberto novos caminhos para o processo de comunhão de informações entre os alunos e professores, criando um meio para a aprendizagem significativa. Ao encontro desta perspectiva, surgiram softwares de geometria dinâmica cuja característica principal é a facilidade de se 'arrastar' as construções geométricas com o ponteiro do mouse, ao mesmo tempo em que as medidas e formas são atualizadas. Goldenberg, Scher e Feurzeig (2008) afirmam que os ambientes de geometria dinâmica permitem aos estudantes efetuarem construções geométricas, alterá-las e manipulá-las facilmente. Para esses autores, o arrastar permite ao usuário mover certos elementos de um desenho e observar as alterações correspondentes.

Utilizando a geometria dinâmica como ferramenta, a atividade de ensino conhecida como investigação matemática permite-nos explorar problemas do mundo real. Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) afirmam que a investigação "não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no inicio de modo confuso, mas que procuramos classificar e estudar de modo organizado" (p. 9). Os autores salientam que nesta metodologia tratamos questões de nosso interesse almejando alcançar uma resposta possível e rigorosamente fundamentada. Ao encontro dos propósitos da investigação matemática, a abordagem pedagógica conhecida como resolução de problemas a partir das ideias de George Pólya (1962) visa "generalizar a partir da observação de casos, argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta" (PÓLYA, 2006).

O presente trabalho apresenta uma proposta pedagógica para aglutinar os benefícios da geometria dinâmica dada pelo Geogebra, através da investigação matemática e resolução de problemas explorando as estratégias e níveis de ensino nos quais podem ser abordados a seguinte questão: *"Dado um octógono regular, construir o quadrado inscrito de maior área e o quadrado circunscrito de menor área."*

## 2 METODOLOGIA

A proposta pedagógica apresentada a seguir, foi criada após uma pesquisa bibliográfica prévia podendo ser empregada tanto na educação básica como no ensino superior, visando trabalhar com os conhecimentos matemáticos previstos para cada grau de ensino que contemplem problemas referentes a extremos relativos de funções. Desta forma, fixado o nível de ensino – educação básica ou superior - tendo como foco a investigação matemática, a luz da resolução de problemas, apresentaremos as quatro fases de trabalho

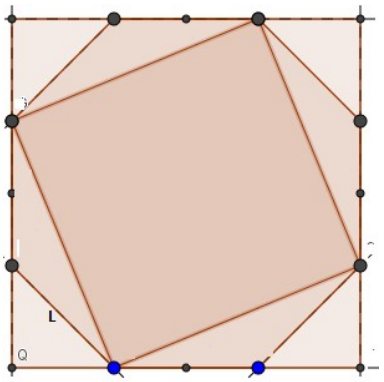
descritas por Polya (2006) que podem ser implementadas no tratamento do problema de otimização enunciado previamente, sendo elas: compreender o problema, estabelecer um plano, executar um plano, fazer um retrospecto da resolução. Além disso, enunciaremos quais conteúdos matemáticos poderão ser abordados em cada etapa do processo para cada nível de ensino e como a geometria dinâmica poderá auxiliar na construção e visualização do problema proposto.

## 3 RESULTADOS e DISCUSSÃO

Nossa proposta pedagógica terá como foco a resolução da seguinte questão: "*Dado um octógono regular, construir o quadrado inscrito de maior área e o quadrado circunscrito de menor área.*"

Em ambos os níveis de ensino podemos lançar mão da visualização da situação com o auxilio da geometria dinâmica através do software Geogebra para compreender claramente o que será necessário na resolução do problema proposto, contemplando a primeira etapa. Assim, construímos o octógono regular de lado L com o recuso tecnológico, um quadrado que circunscreve o octógono regular de lado L, e inscrevemos um quadrado no octógono. Por fim, verificaremos quando a área deste último será máxima. A figura 1 ilustra tal construção.

Figura 1- Construção no Geogebra representado a situação problema.




Fonte: construção própria.

A segunda fase da resolução de problemas abrange a organização de um plano de resolução. Logo, em ambos os níveis de ensino, trataremos o problema em duas etapas. Na primeira, vamos introduzir um sistema de coordenadas para calcular a área do quadrado circunscrito ao octógono regular, ao passo que na segunda, com o auxilio do plano cartesiano, vamos calcular a área do quadrado inscrito em tal octógono, e posteriormente verificar qual condição deve ser satisfeita para que esta área seja máxima. Claramente, as exigências sobre o problema de maximização devem estar de acordo com o nível de ensino trabalhado.

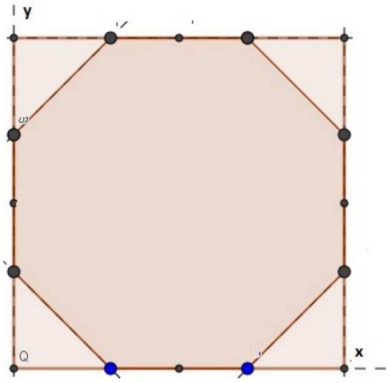
A terceira fase contempla colocar em ação aquilo que foi enunciado na etapa anterior.

**Sobre o quadrado circunscrito ao Octógono Regular:**

Como o ângulo externo de um octógono regular é 45° e todos seus ângulos internos são congruentes, sem perda de generalidade, podemos introduzir um sistema de coordenadas cartesianas, de modo que o quadrado circunscrito ao octógono regular apresente um de seus vértices na origem do sistema cartesiano e com dois de seus lados sobre o eixo das abscissas e ordenadas, sentido positivo (Figura 2). Conseqüentemente, os vértices do quadrado serão nos

pontos (0,0); $\left((1+\sqrt{2})L,0\right); (0,(1+\sqrt{2})L); \left((1+\sqrt{2})L,(1+\sqrt{2})L\right)$ cuja área é $A_Q = \left((1+\sqrt{2})L\right)^2 = (3+2\sqrt{2})L^2$

Figura 2- Construção no Geogebra posicionando o quadrado circunscrito no primeiro quadrante.

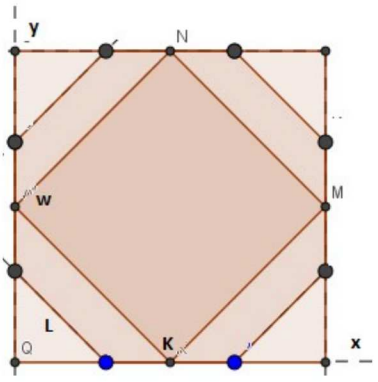



Fonte: construção própria.

**Sobre o quadrado inscrito ao Octógono Regular:**

***Tratamento na educação básica:*** Posicionando o quadrado, de modo que um de seus vértices fique sobre o eixo x, e sobre o lado do octógono, denominamos por K tal vértice do quadrado. Logo, as coordenadas de K serão: $(x,0)$, onde $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}L, \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)L\right]$. Consideremos os pontos K, M, N, W como sendo os vértices do quadrado inscrito no octógono. Como os ângulos internos de um quadrado são retos, os lados de um quadrado são iguais e a soma dos ângulos internos de um triangulo é 180° - via congruências de triângulos - vem que os vértices do quadrado inscrito acima tem as coordenadas: $K(x,0)$, $M\left((1+\sqrt{2})L,x\right)$, $N\left((1+\sqrt{2})L-x,(1+\sqrt{2})L\right)$ e $W\left(0,(1+\sqrt{2})L-x\right)$. A figura 3 ilustra tal situação.

Figura 3- Construção no Geogebra representado a situação problema no plano cartesiano adequado.




Fonte: construção própria.

Na situação acima, a distancia entre pontos consecutivos do quadrado inscrito no octógono fornecerá a medida do lado do quadrado. Logo a medida do lado do quadrado será

$\sqrt{x^2+\left((1+\sqrt{2})L-x\right)^2}$. Portanto, a área do quadrado inscrito no octógono regular é: $A_q(x)=x^2+\left((1+\sqrt{2})L-x\right)^2=2x^2-2(1+\sqrt{2})Lx+\left((1+\sqrt{2})L\right)^2; x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2}L,\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)L\right]$.

Agora, sendo L a constante relacionada a medida do lado do octógono regular, $A_q(x)$ é uma função quadrática, na variável *x*, com concavidade para cima. Por conseguinte, devido a simetria da parábola em relação ao seu eixo, a área máxima do quadrado ocorre quando $x=\frac{\sqrt{2}}{2}L$ ou $x=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)L$, sendo seu valor $A_q\left(\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)L\right)=A_q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)=\left((2+\sqrt{2})\right)L^2$

***Tratamento na educação superior:*** Sendo a educação básica, pré-requisito para o ensino superior, a determinação da fórmula da área do quadrado inscrito como sendo dada pela função $A_q(x)=x^2+\left((1+\sqrt{2})L-x\right)^2=2x^2-2(1+\sqrt{2})Lx+\left((1+\sqrt{2})L\right)^2; x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2}L,\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)L\right]$ poderá ser feita como no nível básico. A partir de então, vamos analisar a monotonia da função $A_q(x)$, calculando sua derivada de primeira ordem. Notamos que $A'_q(x)=4x-2(1+\sqrt{2})L$. Agora, como $A_q$'(x)>0, para $x>\frac{(1+\sqrt{2})L}{2}$, a função $A_q$ é crescente em $\left[\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)L,\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)L\right]$, ou seja, seu máximo relativo ocorrerá em $x=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)L$. Por outro lado, como $A_q$'(x)<0, para $x<\frac{(1+\sqrt{2})L}{2}$. A função $A_q$ é decrescente em $\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)L,\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)L\right]$, ou seja, seu máximo relativo ocorrerá em $x=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)L$. É fácil ver que $A_q\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)L\right)=A_q\left(\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)L\right)$. Assim, a área máxima do quadrado inscrito é $A_q\left(\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)L\right)=A_q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)=\left((2+\sqrt{2})\right)L^2$

Em ambos os níveis de ensino observamos que o quarto passo foi contemplado na proposta pedagógica, tendo em vista que a solução obtida contempla aquilo que o problema solicitou.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta pedagógica apresentada neste trabalho pode ser implementada tanto na educação básica quanto na superior, de modo que o aprofundamento nas questões para a resolução do problema esteja adequado a complexidade de cada nível de ensino. Além disso, a metodologia privilegia a participação ativa do aluno, fazendo com que o educando elabore uma teia que integre diversos saberes matemáticos para resolver um problema de otimização, o que fomenta o incentivo a pesquisa culminando na autonomia do educando auxiliando este a assumir o controle de sua própria aprendizagem.

Acreditamos que a inserção do Geogebra nas disciplinas de Matemática, em conteúdos compatíveis com as potencialidades do software, torna as aulas mais interessantes, pois assim, o aluno interage com o que é aprendido em classe, visto que permite a manipulação do objeto de estudo pelo estudante. Além disso, com esse software matemático, deixamos o aluno livre para criar e testar algumas propriedades que ele julgue válidas. Em nosso caso específico,

fixada a medida de lado L do octógono regular, o aluno poderia calcular a área do quadrado inscrito no octógono regular e a medida da área do quadrado circunscrito e verificar que de fato, a menor área do quadrado circunscrito ao octógono é $A_Q = (3+2\sqrt{2})L^2$ a maior área do quadrado inscrito ao octógono é $A_q = \left((2+\sqrt{2})\right)L^2$.

## REFERÊNCIAS


GOLDENBERG, E. P.; SCHER, D.; FEURZEIG, N. **What lies behind dynamic interactive geometry software?** In: BLUME, G. W.; HEID, M. K. (Ed.). Research on technology and the teaching and learning of matematics: cases and perspectives. Charlotte: Information Age, 2008. v. 2. p. 53-88.

MORAN, J. **Tecnologias digitais para uma aprendizagem ativa e inovadora.** Disponível em: < http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2017/11/tecnologias_moran.pdf >. Acesso em: 30 ago. 2018.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, João P. da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 1ª ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2005.