AVALIAÇÃO DO COEFICIENTE DE TRANSMITÂNCIA EM MEIO HOMOGÊNEO UNIDIMENSIONAL PELO MÉTODO ANALÍTICO DE ORDENADAS DISCRETAS

Dalvana Lopes Ribeiro [1]

João Francisco Prolo Filho [2]

Resumo:

No presente trabalho, o método Analítico de Ordenadas Discretas (ADO) será utilizado para a determinação do coeficiente de transmitância recorrente da incidência de partículas neutras em um meio homogêneo unidimensional. Para isso, será considerado uma classe de problemas em regime estacionário com fontes de nêutrons localizada nos extremos do domínio e o efeito de espalhamento isotrópico. No decorrer do processo, a equação de transporte é transformada em um sistema de EDOs, sendo a solução homogênea obtida por um problema de autovalores de ordem reduzida. Devido as boas características do método ADO como a obtenção de soluções do problema homogêneo de forma analíticas em termos da variável espacial, evitando construção de malhas computacionais e uso de esquemas iterativos ou de interpolação processos. Bem como, as constantes de separação calculadas por um problema de autovalor de ordem reduzida, é que se pretende avaliar a viabilidade do método para o presente caso com o uso de um esquema de quadratura do tipo Half-Range. Para a validação do código e do método os resultados obtidos serão discutidos e comparados com a literatura.

Palavras-chave: transmitância, equação de transporte unidimensional, meio homogêneo, espalhamento isotrópico.

Modalidade de Participação: Pós-Graduação

AVALIAÇÃO DO COEFICIENTE DE TRANSMITÂNCIA EM MEIO HOMOGÊNEO UNIDIMENSIONAL PELO MÉTODO ANALÍTICO DE ORDENADAS DISCRETAS

[1] Aluno de pós-graduação. lopesribeirodalvana20@gmail.com. Autor principal

[2] Docente. joaoprolo@furg.br. Orientador

AVALIAÇÃO DO COEFICIENTE DE TRANSMITÂNCIA EM MEIO HOMOGÊNEO UNIDIMENSIONAL PELO MÉTODO ANALÍTICO DE ORDENADAS DISCRETAS (ADO)

1 INTRODUÇÃO

A transmitância pode ser compreendida como a relação da quantidade de luz ou radiação que é transmitida em um meio com a quantidade total incidente sobre este. Essa propriedade é bastante importante no estudo de materiais, pois a partir de sua mensuração é possível avaliar a capacidade de transmissão de luz ou radiação de um determinado meio. Nos últimos anos tem sido avaliada em diferentes áreas, desde sua influência em edificações (Melo, 2007), tecidos biológicos (Patterson, Chance, & Wilson, 1989) até como parâmetro da capacidade estética em resinas usadas na odontologia (Masotti, 2005).

Quando uma radiação atravessa um material, ela interage com as partículas deste meio em um nível subatômico. Para compreender essa interação é que se usa os conhecimentos provenientes da Teoria de Transporte, que tem como equação principal a equação linearizada de Boltzman. A equação de transporte é de difícil solução analítica por depender de sete variáveis independentes: três espaciais, duas angulares, uma energética e uma variável temporal (Nunes & Barros, 2009). E tendo em vista essa dificuldade que a equação impõe é que inúmeros métodos vem sendo propostos, um deles é o método Analítico de Ordenadas Discretas (ADO) proposto por (Barichello & Siewert, 1999) que tem apresentado relevantes aplicações e bons resultados.

O método ADO tem-se mostrado bastante eficiente no tratamento de problemas de transporte e de radiação e tem se destacado por algumas de suas vantagens, tais como, por não estar restrito a um único esquema de quadratura, ter constantes de separação obtidas através de problemas de autovalores de tamanho reduzido, ter soluções analíticas em termos da variável espacial fazendo com que malhas computacionais não sejam necessárias. Baseado na performance do método ADO é que se propõe, neste trabalho, a aplicação deste para a determinação do coeficiente de trasmitância em meios homogêneos sujeitos à incidência de partículas neutras.

2 METODOLOGIA

Segundo Barichello (1992), a equação do transporte em geometria cartesiana unidimensional, para um meio homogêneo com efeitos de espalhamento isotrópico e

anisotrópico linear, em regime estacionário é representado da seguinte forma

$$\mu \frac{d}{dx}\Psi(x,\mu) + \sigma_t \Psi(x,\mu) = \frac{\sigma_{s0}}{2}\int_{-1}^{1} \Psi(x,\mu')d\mu' + \frac{3}{2}\mu\sigma_{s1}\int_{-1}^{1} \mu'\Psi(x,\mu')d\mu', \tag{1}$$

onde x $[cm]$ e μ correspondem as variáveis posição e direção em que o fluxo angular Ψ $[n/cm^2 s]$ está sendo calculado; σ_t, σ_{s0} e σ_{s1} são, respectivamente, as seções de choque macroscópicas total, de espalhamento isotrópico e de espalhamento anisotrópico linear. Em especial, aqui serão tratados problemas sem fonte interna e os fluxos serão originados através de condições de contorno prescritas.

Na aplicação do método ADO, os termos integrais são aproximados por uma quadratura numérica. Dessa forma, utilizando o esquema *Half-Range* associado a quadratura de Gauss-Legendre (Stroud & Secrest, 1966), e considerando que μ_i representa as direções positivas e $-\mu_i$ as negativas para $i = 1,\ldots,N$ (Figura 1), chega-se a versão em ordenadas discretas da Eq.(1)

$$-\mu_i \frac{d}{dx}\Psi(x,-\mu_i) + \sigma_t \Psi(x,-\mu_i) = \frac{\sigma_{s0}}{2}\sum_{k=1}^{N} w_k[\Psi(x,\mu_k) + \Psi(x,-\mu_k)] - \frac{3}{2}\sigma_{s1}\mu_i \sum_{k=1}^{N} w_k\mu_k[\Psi(x,\mu_k) - \Psi(x,-\mu_k)] \tag{2}$$

e

$$\mu_i \frac{d}{dx}\Psi(x,\mu_i) + \sigma_t \Psi(x,\mu_i) = \frac{\sigma_{s0}}{2}\sum_{k=1}^{N} w_k[\Psi(x,\mu_k) + \Psi(x,-\mu_k)] + \frac{3}{2}\sigma_{s1}\mu_i \sum_{k=1}^{N} w_k\mu_k[\Psi(x,\mu_k) - \Psi(x,-\mu_k)], \tag{3}$$

para $i = 1,\ldots,N$. Buscando-se soluções homogêneas em termos de autovalores e autofunções para o sistema de EDOs, propõe-se que o fluxo angular seja decomposto na forma

$$\Psi(x,\pm\mu_i) = \Phi(\nu,\pm\mu_i)e^{-x/\nu}, \tag{4}$$

para $i = 1,\ldots,N$. Substituindo a Eq.(4) na Eqs.(2)-(3) obtem-se o sistema algébrico definido

como

$$-\frac{\mu_i}{\nu}\Phi(\nu,\mu_i)+\sigma_t\Phi(\nu,\mu_i)=\frac{\sigma_{s0}}{2}\sum_{k=1}^{N}w_k[\Phi(\nu,\mu_k)+\Phi(\nu,-\mu_k)] \\ +\frac{3}{2}\sigma_{s1}\mu_i\sum_{k=1}^{N}w_k\mu_k[\Phi(\nu,\mu_k)-\Phi(\nu,-\mu_k)], \quad (5)$$

$$\frac{\mu_i}{\nu}\Phi(\nu,-\mu_i)+\sigma_t\Phi(\nu,-\mu_i)=\frac{\sigma_{s0}}{2}\sum_{k=1}^{N}w_k[\Phi(\nu,\mu_k)+\Phi(\nu,-\mu_k)] \\ -\frac{3}{2}\sigma_{s1}\mu_i\sum_{k=1}^{N}w_k\mu_k[\Phi(\nu,\mu_k)-\Phi(\nu,-\mu_k)], \quad (6)$$

para $i=1,\ldots,N$.

Seguindo os passos do método ADO (Barichello & Siewert, 1999), a partir das Eqs.(5)-(6) um problema de autovalores é construido com o objetivo de determinar as constantes de separação (ν_j) e autofunções ($\Phi(\nu_j,\mu_i)$) para $i,j=1,\ldots,N$, permitindo que as soluções homogêneas possam ser escritas de forma explícita como

$$\Psi(x,\mu_i)=\sum_{j=1}^{N}A_j\Phi(\nu_j,\mu_i)e^{-(x-x_0)/\nu_j}+A_{j+N}\Phi(-\nu_j,\mu_i)e^{-(x_1-x)/\nu_j}, \quad (7)$$

e

$$\Psi(x,-\mu_i)=\sum_{j=1}^{N}A_j\Phi(\nu_j,-\mu_i)e^{-(x-x_0)/\nu_j}+A_{j+N}\Phi(-\nu_j,-\mu_i)e^{-(x_1-x)/\nu_j}, \quad (8)$$

para $i=1,\ldots,N$.

Note que os coeficientes A_j presentes nas Eqs.(7-8) só serão determinados a partir da utilização das condições de contorno. Como caso particular, serão utilizadas aqui apenas condiçõe de contorno prescritas dadas por

$$\Psi(x_0,\mu_i)=F \text{ e } \Psi(x_1,-\mu_i)=G$$



Figura 1. Representação do domínio a ser estudado.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a validação do código e do método foi considerado o caso de um meio homogêneo isotrópico ($\sigma_{s1} = 0.0$) com condições de contorno prescritas $F = 1.0$ (face incidente) e $G = 0.0$ (face isolada). Quanto aos parâmetros, fixou-se a seção de choque macroscópica total, $\sigma_t = 1.00$, variou-se o coeficiente de espalhamento isotrópico σ_{s0}(0.20, 0.50, 0.80, 0.99), e a quadratura de Gauss-Legendre para $N = 50$ foi usada. O fator de transmissão pode ser numericamente dado por (Clements & Özişik, 1983)

$$T = \frac{\int_0^1 \mu' \Psi(x_1, \mu') d\mu'}{\int_0^1 \mu' \Psi(x_0, \mu') d\mu'} \tag{9}$$

Os resultados que aparecem na Tabela 1 foram gerados aqui usando o software livre Octave 4.2.1, e o tempo de processamento foi inferior a dois segundos em um computador com processador Intel Core I7 com 8GB de Ram.

Tabela 1: Comparação numérica dos resultados obtidos com Schulz (2014) para transmitância em meio homogêneo.

x	$\sigma_{s0} = 0.20$		$\sigma_{s0} = 0.50$		$\sigma_{s0} = 0.80$		$\sigma_{s0} = 0.99$	
	Schulz (2014)	Este Trabalho	Schulz (2014)	Este Trabalho	Schulz (2014)	Este Trabalho	Schulz (2014)	Este Trabalho
0.04	0.933474	0.93347421	-	0.94415819	-	0.95541362	-	0.96285882
0.05	-	0.91810777	0.931156	0.93115585	-	0.94504159	-	0.95430656
0.07	-	0.88858229	-	0.90606388	0.925022	0.92502247	-	0.93788086
0.10	0.846956	0.84695598	0.870438	0.87043785	0.896574	0.89657376	0.914711	0.91471092
0.33	0.601103	0.60110334	-	0.65304658	-	0.72075397	-	0.77533943
0.45	-	0.50803024	-	0.56686834	0.648991	0.64899127	-	0.72004243
0.49	-	0.48085205	-	0.54119699	-	0.62725624	0.703442	0.70344155
0.50	0.474323	0.47432335	0.534993	0.53499287	0.621975	0.62197464	0.699417	0.69941681
1.00	0.246269	0.24626874	0.306709	0.30670882	0.416245	0.41624499	0.544352	0.54435238
2.00	0.0727415	0.07274150	0.107055	0.10705530	0.197270	0.19726968	0.373347	0.37334749
5.00	0.00244614	0.00244613	0.00528758	0.00528758	0.0229218	0.02292178	0.173152	0.17315224

Conforme a Tabela 1 pode-se averiguar a boa concordância entre os resultados obtidos aqui com a literatura (Schulz, 2014), validando assim o código e o método utilizado. Em particular foram gerados resultados que possibilitaram uma melhor análise do fenômeno.

Ainda, segundo a Tabela 1, a transmitância está diretamente vinculada ao parâmetro de espalhamento isotrópico, no sentido de que maiores valores de T são obtidos para maiores valores de σ_{s0}. Porém, o aumento do tamanho do domínio leva a redução do valor de T. Destaca-se também que nenhum destes comportamentos ocorre de forma linear.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho mostra a viabilidade da utilização do método ADO na análise da transmitância em meios homogêneos, onde foi possível comparar alguns resultados com a

literatura e fornecer outros de referência.

As boas características do método ADO, tais como a analiticidade das soluções em relação a variável espacial, o problema de autovalores reduzido e a quadratura *Half-Range* associada, fazem com que este método seja de simples implementação e tenha um baixo custo computacional.

REFERÊNCIAS

Barichello, L. B. (1992). *Formulação analítica para solução do problema de ordenada discreta unidimensional* . Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 1992.

Barichello, L. B., & Siewert, C. E. (1999). A discrete-ordinates solution for a non-grey model with complete frequency redistribution. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, *62*(6), 665–675.

Clements, T., & Özişik, M. (1983). Effects of stepwise variation of albedo on reflectivity and transmissivity of an isotropically scattering slab. *International journal of heat and mass transfer*, *26*(10), 1419–1426.

Masotti, A. S. (2005). *Avaliação da transmitância direta de resinas compostas por meio de espectrofotometria de UV-visível* . Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Odontologia, PUC-RS, Porto Alegre, 2005.

Melo, A. P. (2007). *Análise da influência da transmitância térmica no consumo de energia de edificações comerciais* . Dissertação de Mestrado,Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFSC, Florianópolis, 2007.

Nunes, C. E. A., & Barros, R. C. (2009). Aplicativo computacional para cálculo de blindagem com modelo de transporte S_N unidimensional e monoenergético. In *Proceedings of inac 2009 international nuclear atlantic conference, rio de janeiro, brazil.*

Patterson, M. S., Chance, B., & Wilson, B. C. (1989). Time resolved reflectance and transmittance for the noninvasive measurement of tissue optical properties. *Applied optics*, *28*(12), 2331–2336.

Schulz, D. M. (2014). *Métodos analíticos e computacionais em geofísica nuclear* . Dissertação de Mestrado,Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 2014.

Stroud, A. H., & Secrest, D. (1966). *Gaussian quadrature formulas*. Prentice Hall Inc.