

DEFINIÇÃO DA EXPONENCIAL NA ARITMÉTICA INTERVALAR RDM E APLICAÇÃO EM PROBLEMAS COM DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

Tiago Santos¹

Alice Finger²

Resumo:

Nome: DEFINIÇÃO DA EXPONENCIAL NA ARITMÉTICA INTERVALAR RDM E APLICAÇÃO EM PROBLEMAS COM DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE A Aritmética Intervalar (AI), criada em 1966, por Ramon E. Moore, fornece uma solução automática aos erros ocasionados por aproximações através do uso de intervalos. A Aritmética Intervalar (AI), criada em 1966, por Ramon E. Moore, fornece uma solução automática aos erros ocasionados por aproximações através do uso de intervalos. Diante de uma nova definição pra intervalos e com trabalhos científicos mostrando que tal aritmética retorna resultados mais exatos que a de Moore o objetivo deste trabalho foi definir a exponencial intervalar RDM, até então, não encontrada na literatura, e submetê-la à problemas com distribuição de probabilidade. Após, analisar os intervalos obtidos como resposta, quanto a sua exatidão e qualidade, com a expectativa de obter intervalos mais exatos quando comparados a aritmética de Moore. As implementações destas aritméticas foram realizadas utilizando o pacote de extensão intervalar da linguagem python, chamado IntPy (BARRETO, 2009) e a análise de qualidade dos intervalos solução foi realizada através comparação entre o tamanho dos intervalos.

Palavras-chave: Aritmética Intervalar

Modalidade de Participação: Iniciação Científica

DEFINIÇÃO DA EXPONENCIAL NA ARITMÉTICA INTERVALAR RDM E APLICAÇÃO EM PROBLEMAS COM DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

¹ Aluno de graduação. tiagodsviana@gmail.com. Autor principal

² Docente. alicefinger@gmail.com. Orientador

DEFINIÇÃO DA EXPONENCIAL NA ARITMÉTICA INTERVALAR RDM E APLICAÇÃO EM PROBLEMAS COM DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

1 INTRODUÇÃO

A análise intervalar surgiu com o objetivo inicial de controlar a propagação de erros numéricos em procedimentos computacionais. Estes erros acontecem em virtude dos sistemas computacionais operarem com aritmética de ponto flutuante (ZURRAS et al., 2008). Assim, números reais são representados por aproximação através de um subconjunto chamado números de máquina, que não conseguem representar números reais em toda sua extensão, necessitando, por vezes, truncá-los ou arredondá-los, a cada iteração, o que gera dados carregados de erros. Estes dados aproximados, em sistemas críticos, que necessitam de dados precisos, podem significar o sucesso ou o fracasso do experimento.

A Aritmética Intervalar (AI), criada em 1966, por Ramon E. Moore, fornece uma solução automática aos erros ocasionados por aproximações através do uso de intervalos. Na AI um valor real x é aproximado por um intervalo fechado $X = [\underline{x}, \bar{x}]$, onde $\bar{x}$ e $\underline{x}$ são os limites inferior e superior, respectivamente, do intervalo e x está contido neste intervalo (MOORE, 1966).

Entretanto, a aritmética de Moore possui algumas limitações (LANDOWSKI, 2015) como: excesso de largura dos intervalos; propriedades básicas da matemática não existentes; pode gerar soluções absurdas onde o limite inferior $\underline{x}$ é maior que o limite superior $\bar{x}$ do intervalo X . Procurando resolver estes e outros problemas e limitações, Piegat e Landowski (2012) apresentaram uma nova aritmética intervalar, a chamada *Relative Distance Measure* (RDM) definindo as operações básicas e as propriedades matemáticas satisfeitas em cada operação.

Diante de uma nova definição pra intervalos e com trabalhos científicos mostrando que tal aritmética retorna resultados mais exatos que a de Moore (PIEGAT; LANDOWSKI, 2012)(PIEGAT; LANDOWSKI, 2013)(LANDOWSKI, 2015) o objetivo deste trabalho foi definir a exponencial intervalar RDM, até então, não encontrada na literatura, e submetê-la à problemas com distribuição de probabilidade. Após, analisar os intervalos obtidos como resposta, quanto a sua exatidão e qualidade, com a expectativa de obter intervalos mais exatos quando comparados a aritmética de Moore.

2 METODOLOGIA

Na AI de Moore o intervalo é definido por $X = [\underline{x}, \bar{x}]$, onde $\underline{x}$ é o limite inferior e $\bar{x}$ o limite superior do intervalo X .

Já na aritmética RDM o valor real x pertencente ao intervalo $[\underline{x}, \bar{x}]$ é descrito usando a variável RDM α_x , onde $\alpha_x \in [0, 1]$ da seguinte forma:

$$X = [\underline{x} + \alpha_x \cdot (\bar{x} - \underline{x}), \bar{x} + \alpha_x \cdot (\bar{x} - \underline{x})] \text{ com } \alpha_x \in [0, 1].$$

As implementações destas aritméticas foram realizadas utilizando o pacote de extensão intervalar da linguagem *python*, chamado *IntPy* (BARRETO, 2009) e a análise de qualidade dos intervalos solução foi realizada através comparação entre o tamanho dos intervalos obtidos por intermédio do uso da exponencial RDM definida e aritmética de Moore, e se estes intervalos contêm o número real. O diâmetro do intervalo foi calculado utilizando a seguinte fórmula:

$$\text{Diâmetro do intervalo: } w(x) = \bar{x} - \underline{x}.$$

Além disso, levando-se em consideração que a aritmética intervalar de Moore resolve a exponenciação utilizando a extensão intervalar da potenciação real, isto é, para uma base $\mathbf{X}$, onde $\mathbf{X}$ é um intervalo, e um expoente $\mathbf{Y}$, onde $\mathbf{Y}$ também é um intervalo, têm-se que:

$\mathbf{X} = [\underline{x}, \bar{x}]$. Extendendo-se o conceito para aritmética intervalar RDM, é necessário lembrar que a principal diferença desta aritmética para a aritmética de Moore, é a representação de um intervalo $\mathbf{X}$, logo $\mathbf{X}^{\mathbf{Y}} = [\underline{x}^{\underline{y}}, \bar{x}^{\bar{y}}]$ deve ser reescrito da seguinte forma:

Dado uma base $\mathbf{X}$, onde $\mathbf{X}$ é um intervalo RDM, tal que $\mathbf{X} = [\underline{x} + \alpha_x \cdot (\bar{x} - \underline{x}), \bar{x} + \alpha_{\bar{x}} \cdot (\bar{x} - \underline{x})]$, com $\alpha_x \in [0, 1]$, e um expoente $\mathbf{Y}$, onde $\mathbf{Y}$ também é um intervalo RDM, tal que $\mathbf{Y} = [\underline{y} + \alpha_y \cdot (\bar{y} - \underline{y}), \bar{y} + \alpha_{\bar{y}} \cdot (\bar{y} - \underline{y})]$, com $\alpha_y \in [0, 1]$, postulou-se neste trabalho a seguinte equação:

$$\mathbf{X}^{\mathbf{Y}} = [\underline{x} + \alpha_x \cdot (\bar{x} - \underline{x})^{\underline{y} + \alpha_y \cdot (\bar{y} - \underline{y})}, \bar{x} + \alpha_{\bar{x}} \cdot (\bar{x} - \underline{x})^{\bar{y} + \alpha_{\bar{y}} \cdot (\bar{y} - \underline{y})}] \text{ com } \alpha_x, \alpha_y \in [0, 1]$$

e ao igualar $[\alpha_x, \alpha_{\bar{x}}]$ e $[\alpha_y, \alpha_{\bar{y}}]$ a $[0, 1]$, obtém-se a equação exponencial da aritmética intervalar de Moore, $\mathbf{X}^{\mathbf{Y}} = [\underline{x}^{\underline{y}}, \bar{x}^{\bar{y}}]$, vista anteriormente, que valida o postulado.

Em termos da aritmética RDM, ainda, não existia explicitamente definida uma forma para se determinar uma função na forma $e^{\mathbf{X}}$, onde $\mathbf{X}$, é um intervalo RDM. Neste ponto, este trabalho se propôs a encontrar uma maneira de definir a função exponencial de base natural na aritmética RDM, ou seja, $f(\mathbf{X}) = e^{\mathbf{X}}$. Uma vez que a função e^x , $x \in \mathbb{R}$, pode ser escrita em função de séries de potências de Taylor, postulou-se, novamente, com o intuito de obter bons resultados a seguinte equação:

$$e^{\mathbf{X}} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\mathbf{X}^k}{k!} = 1 + \frac{[\underline{x} + \alpha_x \cdot (\bar{x} - \underline{x}), \bar{x} + \alpha_{\bar{x}} \cdot (\bar{x} - \underline{x})]^1}{1!} + \frac{[\underline{x} + \alpha_x \cdot (\bar{x} - \underline{x}), \bar{x} + \alpha_{\bar{x}} \cdot (\bar{x} - \underline{x})]^2}{2!} + \dots$$

$$+ \frac{[\underline{x} + \alpha_x \cdot (\bar{x} - \underline{x}), \bar{x} + \alpha_{\bar{x}} \cdot (\bar{x} - \underline{x})]^n}{n!}$$

Com o objetivo de verificar o uso da exponencial natural RDM definida, aplicou-se ela às distribuições Exponencial, Normal e Gama, as quais já foram definidas na sua forma intervalar. Além disso, cada distribuição de probabilidade foi calculada utilizando dois métodos de integração intervalar, de Rall e de Bedregal, (RALL, 1982)(BEDREGAL, 2010) ambas com 100.000 subdivisões. Por fim, a todas às distribuições foram aplicadas duas configurações de parâmetros.

Com o objetivo de avaliar cada solução, é apresentado o tempo de execução de cada solução, obtido através da média simples entre os tempos instantâneos de 10 execuções de cada algoritmo. Além disso, é apresentada, com o intuito de determinar a qualidade dos intervalos encapsuladores obtidos, a análise de erros verificada por intermédio das métricas de qualidade de intervalos.

Para todos os testes e resultados foi utilizado o mesmo computador com as seguintes especificações técnicas: processador Intel Core i7-2670QM 6M Cache, CPU @ 2.20GHz x 8; d memória RAM 8 GB, DDR3 @ 1333 MHz; armazenamento HD Sata 1TB, modelo Toshiba MK1059GSM, 5400 RPM; sistema operacional Linux Ubuntu 16.04 LTS, Kernel versão 4.13.0.43.62 amd64.

3 RESULTADOS e DISCUSSÃO

Para cada distribuição de probabilidade há duas configurações de Parâmetros calculadas.

Distribuição Exponencial: $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$

- **Configuração 1:** intervalo $A = [20.0, 50.0]$, $\alpha = 0.010$, $n = 100.000$ subintervalos
- **Configuração 2:** intervalo $A = [15.0, 45.0]$, $\alpha = 0.005$, $n = 100.000$ subintervalos

Distribuição Normal $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

- **Configuração 1:** $\sigma = 1$, $\mu = 0$, intervalo $A = [-0.90, -0.10]$, $n = 100.000$ subintervalos
- **Configuração 2:** $\sigma = 1$, $\mu = 0$, intervalo $A = [-0.50, 0.25]$, $n = 100.000$ subintervalos

Distribuição Gama $f(x) = \frac{\lambda^v}{\Gamma(v)} e^{-\lambda x} x^{v-1}$

- **Configuração 1:** $\lambda = 0.05$, $v = 1.0$, intervalo $A = [20, 40]$, $n = 100.000$ subintervalos
- **Configuração 2:** $\lambda = 0.01$, $v = 0.09$, intervalo $A = [5, 15]$, $n = 100.000$ subintervalos

Por intermédio das Tabelas 1 e 2, é possível verificar, somado ao fato de que todos os intervalos contêm a solução real, que os melhores resultados, ou seja, os intervalos mais exatos, em todos os cenários e distribuições foram aqueles que utilizaram a função exponencial RDM definida neste trabalho.

Tabela 1 - Comparativo dos resultados agrupados por métodos de integração intervalar - Método de Integração de Rall.

Exemplo	Distribuição	Aritmética Intervalar	Resultado	Tempo
1	Exponencial	Real	[0.2122000933655982]	0.04
		Moore	[0.2121997750643845, 0.2122004116665235]	3.60
		RDM	[0.2121997750653166, 0.2122004116655970]	12.88
2	Exponencial	Real	[0.1292272675692315]	0.04
		Moore	[0.1292271706482232, 0.1292273644901790]	3.52
		RDM	[0.1292271706487510, 0.1292273644896515]	12.31
1	Normal	Real	[0.2761120373761500]	0.08
		Moore	[0.2761115139049955, 0.2761125608453779]	10.74
		RDM	[0.2761115139059979, 0.2761125608443796]	18.31
2	Normal	Real	[0.2901687869569567]	0.08
		Moore	[0.2901685651377956, 0.2901690087735161]	10.75
		RDM	[0.2901685651389673, 0.2901690087723468]	18.77
1	Gama	Real	[0.2325441579345146]	0.05
		Moore	[0.2325429952150688, 0.2325453206589139]	4.50
		RDM	[0.2325429952162059, 0.2325453206577853]	14.20
2	Gama	Real	[0.0758096920543245]	0.06
		Moore	[0.0758092356245852, 0.0758101484883289]	4.56
		RDM	[0.0758092356249574, 0.0758101484879601]	14.60

Fonte: do autor, 2018.

Tabela 2 - Comparativo dos resultados agrupados por métodos de integração intervalar - Método de Integração de Bedregal.

Exemplo	Distribuição	Aritmética Intervalar	Resultado	Tempo
1	Exponencial	Real	[0.2122000933655982]	0.04
		Moore	[0.2121997750644319, 0.2122004116664778]	4.58
		RDM	[0.2121997750653114, 0.2122004116655919]	14.13
2	Exponencial	Real	[0.1292272675692315]	0.04
		Moore	[0.1292271706482469, 0.1292273644901569]	4.62
		RDM	[0.1292271706487519, 0.1292273644896542]	13.61
1	Normal	Real	[0.2761120373761500]	0.08
		Moore	[0.2761115139049678, 0.2761125608454055]	11.83
		RDM	[0.2761115139059972, 0.2761125608443797]	19.37
2	Normal	Real	[0.2901687869569567]	0.08
		Moore	[0.2901685651377990, 0.2901690087735067]	11.37
		RDM	[0.2901685651389701, 0.2901690087723478]	19.74
1	Gama	Real	[0.2325441579345146]	0.05
		Moore	[0.2325429952150885, 0.2325453206589077]	5.89
		RDM	[0.2325429952162032, 0.2325453206577832]	15.79
2	Gama	Real	[0.0758096920543245]	0.06
		Moore	[0.0758092356245835, 0.0758101484883360]	5.75
		RDM	[0.0758092356249570, 0.0758101484879613]	15.88

Fonte: do autor, 2018.

Ainda é possível inferir através da verificação destas tabelas que o método de integração intervalar de Bedregal retornou soluções mais exatas, em comparação com o método de Rall, quando ambos utilizam a função Exponencial definida neste trabalho. Outrossim, é possível verificar que o tempo utilizado pelas aplicações que utilizaram a AI RDM foi em média três vezes maior, devido às somas de potências de Taylor utilizadas na definição da exponencial RDM. Contudo, tal problema pode ser sanado através de paralelização das ações.

A Tabela 3, por sua vez, ilustra de maneira mais clara o diâmetro dos intervalos soluções encontrados nos diferentes exemplos e distribuições de probabilidade, tanto utilizando o método de integração intervalar de Rall quanto de Bedregal. É possível verificar, que em todas as ocorrências o diâmetro obtido com AI RDM e o uso da exponencial RDM definida neste trabalho retornou um intervalo menor, isto é, mais exato quanto comparado com a AI de Moore.

Tabela 3 - Comparação dos diâmetros dos resultados por métodos de integração

Exemplo	Distribuição	Aritmética Intervalar	Diâmetro - Rall	Diâmetro - Bedregal
1	Exponencial	Moore	6.3660213905913920e-07	6.3660204585591630e-07
		RDM	6.3660028046252931e-07	6.3660028051804040e-07
2	Exponencial	Moore	1.9384195579230656e-07	1.9384190999560680e-07
		RDM	1.9384090046981050e-07	1.9384090227392292e-07
1	Normal	Moore	1.0469403823876178e-06	1.0469404376767244e-06
		RDM	1.0469383816547050e-06	1.0469383825428835e-06
2	Normal	Moore	4.4363572049288535e-07	4.4363570778083170e-07
		RDM	4.4363337953212680e-07	4.4363337764474764e-07
1	Gama	Moore	2.3254438451525417e-06	2.3254438192565896e-06
		RDM	2.3254415794093930e-06	2.3254415800477712e-06
2	Gama	Moore	9.1286374369337060e-07	9.1286375254739930e-07
		RDM	9.1286300275827960e-07	9.1286300428483620e-07

Fonte: do autor, 2018.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ainda que a AI RDM seja um assunto relativamente novo, é notório que ela retorna intervalos mais exatos e confiáveis pois ela consegue corrigir os problemas apresentados pela AI de Moore, que por vezes tornam a aritmética de Moore falha e não permitem a máxima exatidão dela.

Outrossim, embora os Algoritmos desenvolvidos com RDM, tenham gasto um tempo maior que as soluções com a AI de Moore, é possível reduzir esse tempo utilizando o paralelismo. Este maior tempo se deve às somas das potências de Taylor, isto é, ao deve-se ao maior número operações executadas.

E, por fim, ficou claro que caso seja necessário trabalhar com as distribuições estudadas neste trabalho, independentemente se o método de integração intervalar for Rall ou Bedregal, a AI RDM, utilizando a exponencial RDM, retornou resultados mais exatos quando comparados à AI de Moore em todos os testes.

Em vista da definição da operação exponencial RDM de base (e) e do emprego desta operação nas distribuições de probabilidade neste trabalho, é uma indicação de trabalho futuro, definir a operação logarítmica para a AI RDM, e a partir da estender a exponencial RDM para toda e qualquer base, tendo em vista que a equação em termos da expansão de Taylor para uma exponencial de base (a) qualquer, necessita da operação de logaritmos. E por fim é outra indicação paralelizar as operações dos códigos com o intuito de acelerar a

execução dos algoritmos, diminuindo o tempo, porém, obtendo a máxima precisão dos intervalos.

REFERÊNCIAS

BARRETO, R. M. IntPy. 2009. Disponível em: <<http://pypi.python.org/pypi/IntPy/0.1.3>>. Acesso em: 12 set. 2018.

BEDREGAL, B. R.; BEDEGRAL, R. C. A generalization of the moore and yang integral approach. **Computing**, 2010.

LANDOWSKI, M. Differences between moore and rdm interval arithmetic. **Intelligent Systems**, v. 322, p. 331–340, 2015.

MOORE, R. E. Interval Analysis. **Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall**, vol., no., p. 159, 1966.

PIEGAT, A.; LANDOWSKI, P. M. Two interpretations of multidimensional rdm interval arithmetic - multiplication and division. **International Journal of Fuzzy Systems**, v. 15, n. 4, p. 488–496, dez. 2013.

PIEGAT, A.; LANDOWSKI, M. Is the conventional interval arithmetic correct? **Journal of Theoretical and Applied Computer Science**, v. 6, n. 2, p. 27–44, 2012.

RALL, L. B. Integration of interval functions ii - the finite case*. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, 1982.

ZURRAS, D. et al. IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic,. **IEEE Std 754-2008**, vol., no., p. 1–70, ago. 2008.